Devoir de synthèse n°1

Exercice 1 (QCM)

Dans chacune des questions suivantes, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la réponse choisie

1) Si n est un entier naturel non nul alors $\lim_{x\to(-1)^-} \frac{1}{(x+1)^{2n-1}} =$

- $-\infty$
- $+\infty$
- 0

2) Si f une fonction définie sur IR et paire tel que $\lim_{+\infty} f(x) = 2$ alors :

- $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{-\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{-\infty} f(x) = -2$

3) Si $A, B\ et\ M$ sont trois points distincts du plan tel que : $2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \pi[\pi]$alors :

- $A, B\ et\ M$ sont alignés
- $(AB) \perp (MB)$
- $M \in C_{[AB]} \backslash \{A, B\}$

4) Si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ alors $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ admet une mesure dans :

- $[-2\pi, -\pi]$
- $[2\pi, 3\pi]$
- $[-9\pi, -8\pi]$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 21} & si\ x \leq 2 \\ \frac{2x^2-x-6}{-x^2+5x-6} & si\ \in]2,3[\cup]3,4[\\ \sqrt{x^2 + x + 5} + ax & si\ x \geq 4\ (a \in IR) \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f

1) Déterminer D_f

2) Déterminer $\lim_{3^-} f(x)$ et $\lim_{3^+} f(x)$

3) Etudier la continuité de f en 2

4) Calculer $\lim_{-\infty} f(x)$. Représenter l'allure de la courbe au voisinage de $-\infty$

5) Déterminer a pour que f soit continue en 4

Exercice 3

I. soit $f(x) = \frac{\sqrt{2x}-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{x}}$

1) Déterminer D_f **2)** Calculer $\lim_{0^+} f(x)$ et $\lim_{+\infty} f(x)$

3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et donner son prolongement F

II. On considère les deux fonctions $f\ et\ g$ définie par :

$f(x) = \frac{x^2-9}{|x|-3}$ et $g(x) = \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$

1) f est-elle prolongeable par continuité en -3 ? en 3. Si oui donner le prolongement

2) **a)** Calculer $\lim_1 g(x)$ **b)** En déduire que g est prolongeable par continuité en 1

Exercice 4

Soit $f(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) **a)** Expliciter $f(x)$ pour $x \in [1,2[$ et pour $x \in [2,3[$

b) Montrer que f est continue en 2

3) Etudier la continuité de f en $\sqrt{2}$

4) Soit $k \in \mathbb{Z}$

a) Expliciter $f(x)$ pour $x \in [k, k+1[$. En déduire que f est continue à droite en k

b) Expliciter $f(x)$ pour $x \in [k-1, k[$. En déduire que f est continue à gauche en k

5) Déduire que f est continue sur IR

Exercice 5

1) **a)** Exprimer $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$ en fonction de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$

b) Calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

c) Calculer alors $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$

2) soit $A = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2(\frac{3\pi}{8}) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2(\frac{7\pi}{8})$ et

$B = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2(\frac{3\pi}{8}) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2(\frac{7\pi}{8})$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$

b) En déduire les valeurs exacte de A et B

3) Simplifier l'expression $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi + x) - \sin(7\pi - x)$

Exercice 6

1) **a)** Rappeler l'expression de $\cos(\pi + 2x)$ en fonction de $\cos(2x)$

b) En déduire les solutions dans IR de : $\cos(2x) + \cos(3x) = 0$ (1)

2) Montrer que pour tout réel x : $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

3) Soit l'équation : $4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = 0$ (2)

Montrer que x est une $solution$ de (1) $\Leftrightarrow X = \cos x$ est une $solution$ de (2)

4) Déduire que les solutions de l'équation (2) sont : $X = \cos\pi$; $X = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $X = \cos(\frac{3\pi}{5})$

5) **a)** En remarquant que -1 est une solution de $4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = 0$ Factoriser l'expression $4X^3 + 2X^2 - 3X - 1$

b) Résoudre alors l'équation (2)

6) Déterminer le signe de $\cos(\frac{\pi}{5})$ puis donner la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{5})$